

## SUCESIONES NUMÉRICAS

### Introducción

El concepto de límite juega un papel clave en todo el Cálculo Infinitesimal. En este capítulo se introduce este concepto de forma sencilla al estudiar la convergencia de sucesiones numéricas.

El interés de este capítulo es doble, no sólo se introduce uno de los conceptos más importantes del Análisis, sino que además se estudian en detalle las propiedades de las sucesiones, herramienta imprescindible en la modelización de muchos problemas discretos. Por ello, ante una sucesión, el objetivo no será sólo el cálculo de su límite sino también el análisis de sus propiedades.

Aunque el tema se centra en el estudio de las sucesiones de números reales, se ha incluido un pequeño epígrafe relativo a las de números complejos.

Las sucesiones de Cauchy y los límites de oscilación pueden obviarse en una primera lectura más interesada en las aplicaciones prácticas que en los conceptos teóricos.

### 1. Definiciones generales

#### 1.1. Definición. Sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si para cada  $n \in \mathbb{N}$   $a(n) = a_n$ , la sucesión  $a$  será representada por  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , o simplemente  $(a_n)$ .

Se llama rango de la sucesión  $(a_n)$  al conjunto de números reales  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

NOTAS:

- 1) *La noción de sucesión es generalizable a espacios métricos arbitrarios. Si  $E$  es un espacio métrico, una sucesión en  $E$  es una aplicación de  $\mathbb{N}$  en  $E$ . Los conceptos que siguen se pueden definir de modo análogo.*
- 2) *Existen diferentes formas de definir una sucesión: dando la función que define el término general, dando una ley de recurrencia, dando unos pocos términos de modo que quede claro cómo se construyen los siguientes, etc. En los problemas resueltos 1 y 2 pueden verse sucesiones definidas de algunas de estas formas.*

**1.2. Definición. Límite de una sucesión**

Se dice que un número real  $l$  es límite de una sucesión  $(a_n)$  y se representa  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  ó  $a_n \rightarrow l$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) / \forall n > N_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

Es decir fuera del intervalo  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  hay a lo sumo  $N_0$  términos de la sucesión.

Observemos que de la definición de límite se deduce que

$$a_n \rightarrow l \iff (a_n - l) \rightarrow 0 \iff |a_n - l| \rightarrow 0$$

Se dice que la sucesión  $(a_n)$  tiene límite  $+\infty$  y se representa  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  ó  $a_n \rightarrow +\infty$  si

$$\forall M \quad \exists N_0(M) / \forall n > N_0 \quad a_n > M$$

Y se dice que una sucesión  $(a_n)$  tiene límite  $-\infty$  y se representa  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  ó  $a_n \rightarrow -\infty$  si

$$\forall M \quad \exists N_0(M) / \forall n > N_0 \quad a_n < M$$

**1.3. Definición. Sucesión convergente**

Se dice que una sucesión  $(a_n)$  es convergente si existe  $l \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ .

EJEMPLOS:

- 1) Una sucesión constante  $a_n = c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  es convergente a  $c$ .
- 2) La sucesión  $\left(\frac{1}{n}\right)$  es convergente a  $0$ .

**1.4. Definición. Sucesión divergente**

Se dice que una sucesión  $(a_n)$  es divergente si

$$\forall M \quad \exists N_0(M) / \forall n > N_0 \quad |a_n| > M$$

EJEMPLO: La sucesión  $(n)$  es divergente (tiene límite  $+\infty$ ), la sucesión  $(-n)$  es también divergente (tiene límite  $-\infty$ ) y la sucesión  $(n(-1)^n)$  también, aunque no tiene límite.

NOTA: En ocasiones llamaremos “infinitos” a las sucesiones divergentes

**1.5. Definición. Sucesión oscilante**

Una sucesión se llama oscilante si no es convergente ni divergente.

EJEMPLO: Las sucesiones  $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$  y  $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, 7, \dots)$  son oscilantes.

**1.6. Teorema. Unicidad del límite**

Una sucesión  $(a_n)$  si tiene límite, finito o no, es único.

**1.7. Definición. Sucesión acotada**

Se dice que una sucesión  $(a_n)$  es acotada si su rango es un conjunto acotado, es decir si existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|a_n| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.8. Teorema**

Toda sucesión convergente es acotada.

El recíproco de este resultado no es cierto.

EJEMPLO: La sucesión  $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$  es acotada y no es convergente.

**1.9. Definición. Subsucesión**

Dada una sucesión  $(a_n)$ , una subsucesión suya viene definida por una aplicación estrictamente creciente

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ j &\longmapsto n_j \end{aligned}$$

representándose dicha subsucesión por  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ .

NOTA: La idea intuitiva de subsucesión es escoger términos de la sucesión en sentido creciente. Así la subsucesión de los términos pares de la sucesión  $(a_n)$  es  $(a_{2n})$ .

**1.10. Teorema**

- i) Si una sucesión tiene límite  $l$ , finito o no, todas sus subsucesiones tienen también límite  $l$ .
- ii) Si una sucesión es acotada, todas sus subsucesiones son acotadas.

OBSERVACIÓN: Un criterio práctico para demostrar que una sucesión no tiene límite es encontrar dos subsucesiones que tiendan a límites distintos.

EJEMPLO: La sucesión  $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$  no tiene límite. La subsucesión de los términos pares tiene límite 2 y la de los impares tiene límite 1.

**1.11. Teorema**

- i) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.
- ii) Toda sucesión tiene una subsucesión convergente o divergente.

**1.12. Definición. Límite de oscilación**

Diremos que  $l$  (número real o infinito) es límite de oscilación de una sucesión  $(a_n)$  si es el límite de alguna subsucesión suya,  $(a_{n_j})$ .

OBSERVACIÓN: A diferencia de lo que sucede con el límite de una sucesión, fuera de un entorno de un límite de oscilación puede haber infinitos términos de la sucesión.

**1.13. Teorema**

Un valor  $l$ , finito o no, es límite de oscilación de una sucesión si y sólo si en todo entorno suyo hay infinitos términos de la sucesión.

NOTA: Si  $a$  es un punto de acumulación del rango de la sucesión  $(a_n)$ , entonces  $a$  es límite de oscilación de la misma, pero el recíproco no es cierto.

**1.14. Teorema**

Sea  $(a_n)$  una sucesión y sea  $l$  finito o no. Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  si y sólo si  $l$  es el único límite de oscilación de  $(a_n)$ .

**1.15. Definición. Límites superior e inferior**

Se considera en el conjunto  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  una relación de orden,  $<$ , que coincide con el orden usual en  $\mathbb{R}$  y verifica que  $-\infty < x < +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Dada una sucesión  $(a_n)$ , sea  $E \subset \overline{\mathbb{R}}$  el conjunto de todos los valores que son límites de oscilación de  $(a_n)$ .

Se define el límite superior de  $(a_n)$ :  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E$ .

Y se define el límite inferior de  $(a_n)$ :  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf E$ .

(Los supremos e ínfimos se toman en  $\overline{\mathbb{R}}$  con el orden considerado.)

NOTA: Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

## 2. Sucesiones de Cauchy, monótonas y recurrentes

**2.1. Definición. Sucesión de Cauchy**

Una sucesión  $(a_n)$  es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) / \forall p, q > N_0 \quad |a_p - a_q| < \varepsilon$$

**2.2. Teorema**

Una sucesión de números reales es de Cauchy si y sólo si es convergente.

NOTA: Los conceptos de sucesión convergente y de Cauchy se pueden generalizar a un espacio métrico cualquiera, cambiando los valores absolutos por distancias. Pero, en general, no son equivalentes. Toda sucesión convergente es de Cauchy pero el recíproco sólo es cierto en determinados espacios métricos que se denominan completos. El espacio métrico de los números reales con la distancia usual es un espacio métrico completo y por ello en  $\mathbb{R}$  los conceptos de sucesión de Cauchy y convergente son equivalentes. Esto tiene la ventaja de que se puede demostrar que una sucesión es convergente sin la necesidad de conocer el candidato a límite. En el problema resuelto 12 puede verse un ejemplo de espacio métrico no completo.

**2.3. Definición. Sucesión monótona**

Se dice que una sucesión  $(a_n)$  es monótona si verifica una de las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} && \text{(monótona creciente)} \\ a_n &\geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} && \text{(monótona decreciente)} \end{aligned}$$

NOTA: En la práctica para ver si una sucesión es monótona se puede estudiar el signo de  $a_{n+1} - a_n$  o bien, si los términos de la sucesión son positivos, puede analizarse el valor del cociente de dos consecutivos. En este caso, si  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$  para todo  $n$ , la sucesión es monótona decreciente y si  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  para todo  $n$ , es monótona creciente (véase problema resuelto 18).

**2.4. Teorema**

- i) Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
- ii) Toda sucesión monótona y no acotada es divergente. (En caso de ser creciente tiene límite  $+\infty$ , y si es decreciente, tiene límite  $-\infty$ .)

**2.5. Definición. El número  $e$**

La sucesión  $\left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$  es monótona y acotada, por tanto es convergente. A su límite se le designa con la letra  $e$ .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

En general, se verifica que  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{1/a_n}$  para cualquier sucesión  $(a_n) \rightarrow 0$  con  $a_n \neq 0$  para todo  $n$ .

**2.6. Definición. Sucesiones recurrentes**

Llamaremos sucesión recurrente a aquella sucesión  $(a_n)$  cuya definición se apoya en una relación del tipo  $f(a_{n+p}, a_{n+p-1}, \dots, a_n, n) = 0$  (con  $p$  fijo) que liga un término con los anteriores.

EJEMPLO: La expresión

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_n \end{cases}$$

define, de forma recurrente, la sucesión  $(1, 2, 3, 4, \dots)$  de término general  $a_n = n$ .

OBSERVACIÓN: En ocasiones no es fácil encontrar una expresión  $a_n = g(n)$  para el término general de una sucesión definida de modo recurrente. En el siguiente epígrafe veremos cómo hacerlo para algunos casos particulares.

Para calcular el límite de una sucesión definida de este modo, una posibilidad es intentar demostrar la existencia de dicho límite, por ejemplo, con técnicas de monotonía y

acotación, usando para dichas técnicas generalmente el principio de inducción, y a continuación, para encontrar su valor, se pueden tomar límites en la expresión que define la sucesión (véanse los problemas resueltos 18 y 19).

### 3. Ecuaciones en diferencias

#### 3.1. Definición. Ecuación en diferencias

Se denomina ecuación en diferencias de orden  $p$  a una relación del tipo

$$f(x_{n+p}, x_{n+p-1}, \dots, x_n, n) = 0$$

Resolver la ecuación en diferencias es encontrar, de modo explícito, las sucesiones  $(x_n)$  que la satisfagan.

COMENTARIOS:

- 1) En general una ecuación en diferencias tiene infinitas soluciones. A veces se establecen condiciones iniciales para limitar el número de soluciones.
- 2) Para la mayoría de ecuaciones en diferencias no es fácil encontrar una fórmula cerrada o explícita " $x_n = g(n)$ " de la solución, y ésta se suele expresar como sucesión recurrente, en la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \\ &\vdots \\ x_p &= a_p \\ x_{n+p} &= g(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p-1}) \end{aligned}$$

#### 3.2. Definición. Ecuación lineal

Una ecuación en diferencias de orden  $p$  se denomina lineal si es de la forma

$$a_0(n)x_n + a_1(n)x_{n+1} + \dots + a_p(n)x_{n+p} = b(n)$$

donde  $a_p(n) \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Si la función de variable natural  $b(n)$  es idénticamente cero, la ecuación recibe el nombre de ecuación en diferencias homogénea. Si las funciones  $a_i(n)$  son constantes, se llama ecuación en diferencias con coeficientes constantes.

NOTA: Observemos que las funciones  $a_i(n)$  y  $b(n)$  son, en definitiva, sucesiones de números reales.

#### 3.3. Resolución de la ecuación lineal de primer orden

1. Caso de ecuación homogénea:

La ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea se puede escribir

$$x_{n+1} = a(n)x_n$$

y su solución, sujeta a la condición inicial  $x_1 = c$ , es

$$x_n = c \prod_{i=1}^{n-1} a(i) \quad n > 1$$

donde  $\prod_{i=1}^{n-1} a(i)$  denota el producto  $a(1) \cdot a(2) \cdots a(n-1)$ .

2. Caso de ecuación completa:

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n)$$

La solución de esta ecuación, con la condición inicial  $x_1 = c$ , es

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} a(i) \left( c + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b(i)}{\prod_{j=1}^i a(j)} \right) \quad (n > 1)$$

NOTAS:

- 1) Es importante observar que para aplicar la fórmula anterior la ecuación ha de estar normalizada, es decir escrita en la forma  $x_{n+1} = a(n)x_n + b(n)$ . Si está escrita de otra forma se deberá normalizar previamente. Véase problema resuelto 22.
- 2) La fórmula para la solución de la ecuación completa no es fácil de recordar, por ello conviene saber que se ha obtenido por el llamado “método de variación de las constantes” a partir de la solución de la ecuación homogénea, buscando una sucesión  $c(n)$  de modo que la expresión

$$x_n = c(n) \prod_{i=1}^{n-1} a(i)$$

sea solución de la ecuación completa.

- 3) *DERIVE* resuelve automáticamente ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con la instrucción `LIN1_DIFFERENCE`. En este caso, también es necesario que la ecuación esté normalizada.

### 3.4. Resolución de la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

Nos limitaremos al caso de ecuaciones homogéneas, es decir de la forma

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = 0 \quad (1)$$

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación de este tipo es un espacio vectorial de dimensión 2, por lo que, una vez encontradas dos soluciones linealmente independientes, cualquier solución se puede expresar como combinación lineal de ellas.

Se denomina polinomio característico de la ecuación (1) al polinomio de segundo grado

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

y el cálculo de las raíces de este polinomio permite resolver la ecuación.

1. Si  $c_1$  y  $c_2$  son raíces reales y distintas del polinomio característico, la solución de la ecuación (1) es una expresión de la forma  $x_n = Ac_1^n + Bc_2^n$ , con  $A, B \in \mathbb{R}$ .
2. Si  $c$  es una raíz doble del polinomio característico, la solución general de la ecuación en diferencias es de la forma  $x_n = Ac^n + Bnc^n$ , con  $A, B \in \mathbb{R}$ .
3. Si  $\rho e^{\pm i\theta}$  son raíces complejas del polinomio característico, las soluciones de la ecuación en diferencias son  $x_n = A\rho^n \cos(n\theta) + B\rho^n \sin(n\theta)$ , con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

NOTAS:

- 1) *En cada uno de los casos anteriores, para obtener una solución particular sujeta a condiciones iniciales, se usan éstas para determinar las constantes  $A$  y  $B$ . Véase problema resuelto 23.*
- 2) *DERIVE resuelve automáticamente ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes, con la instrucción LIN2\_CCF\_BV.*

## 4. Algunas propiedades de los límites de sucesiones

### 4.1. Teorema. Álgebra de límites

Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones convergentes a  $a$  y  $b$ , respectivamente. Entonces

- i)  $(a_n \pm b_n) \rightarrow a \pm b$ .
- ii)  $(a_n b_n) \rightarrow ab$ .
- iii) Si  $b_n, b \neq 0$ , entonces  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \frac{a}{b}$ .

### 4.2. Teorema

Si  $a_n \rightarrow l$ , entonces  $f(a_n) \rightarrow f(l)$  cuando  $f$  es una de las siguientes funciones:

Polinómica, exponencial, valor absoluto,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = x^{1/p}$  ( $p \in \mathbb{N}$ , impar).

Si además  $a_n > 0$  para todo  $n$  y  $l > 0$ , también se verifica el resultado cuando  $f$  es una función logarítmica ( $f(x) = \log_a(x)$ ,  $a > 0$ ) y cuando  $f(x) = x^{1/p}$  ( $p \in \mathbb{N}$ , par).

NOTA: *La razón es que estas funciones son continuas, como se verá en el capítulo 6.*

### 4.3. Teorema

Si  $(a_n)$  y  $(b_n)$  son dos sucesiones convergentes a  $a$  y  $b$  respectivamente y  $a > 0$ , entonces la sucesión  $(a_n)^{b_n}$  converge a  $a^b$ .

**4.4. Teorema**

Sea  $(a_n)$  una sucesión convergente a  $l \in \mathbb{R}$ , y sea  $m \in \mathbb{R}$ ,  $l > m$ . Entonces existe  $N_0$  tal que  $a_n > m$  para todo  $n > N_0$ .

OBSERVACIÓN:

*Este resultado es consecuencia de que para todo  $\varepsilon > 0$  en el intervalo  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  están casi todos los términos de la sucesión.*

**4.5. Teorema**

Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones con límites respectivos  $a$  y  $b$ . Si existe  $N_0$  tal que  $a_n \leq b_n$  para todo  $n > N_0$ , entonces  $a \leq b$ .

OBSERVACIÓN: *No se verifica una relación similar con desigualdades estrictas, pues puede suceder que  $a_n < b_n$  para todo  $n$  y  $a = b$ .*

*Por ejemplo, las sucesiones  $a_n = \frac{1}{n}$  y  $b_n = 0$  para todo  $n$  verifican que  $b_n < a_n$  y sin embargo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .*

**4.6. Teorema. Regla del sandwich**

Sean  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  y  $(c_n)$  tres sucesiones tales que existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  verificando:

- i)  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para todo  $n \geq N_0$ .
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ .

Entonces existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  y es igual a  $l$ .

COMENTARIO: *El resultado es cierto tanto si  $l \in \mathbb{R}$  como si  $l = \pm\infty$ . Pero obviamente en el caso  $l = \pm\infty$  es suficiente con que se verifique una de las dos desigualdades del apartado i) (la primera en caso de  $+\infty$  y la segunda en caso de  $-\infty$ ).*

**4.7. Corolario**

Si una sucesión  $(a_n) \rightarrow 0$  y otra sucesión  $(b_n)$  está acotada, entonces la sucesión producto  $(a_n b_n) \rightarrow 0$ .

## 5. Cálculo práctico de límites

**5.1. Indeterminaciones**

Con las sucesiones convergentes se puede operar aritméticamente, obteniéndose en general, como se vio en 4.1, la conservación de los límites en las operaciones racionales. También es posible operar con sucesiones con límite infinito y se verifica un análogo al teorema 4.1, del que podrían generalizarse algunos resultados para sucesiones oscilantes y divergentes, salvo que se produzcan indeterminaciones.

Las principales indeterminaciones son las siguientes:

1. De tipo suma:

Si  $a_n \rightarrow \infty$  y  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $(a_n - b_n)$  es una indeterminación de tipo  $\infty - \infty$ .

2. De tipo producto o cociente:

i) Producto: Si  $a_n \rightarrow 0$  y  $b_n \rightarrow \pm\infty$ ,  $(a_n b_n)$  da lugar a la indeterminación  $0 \cdot \infty$ .

ii) Cociente: Si  $a_n \rightarrow 0$  y  $b_n \rightarrow 0$ , o si  $a_n \rightarrow \infty$  y  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  da lugar a las indeterminaciones  $\frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$ , respectivamente.

OBSERVACIÓN: Una indeterminación de tipo suma puede reducirse a una de tipo producto o cociente ya que

$$a_n - b_n = \frac{\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right)}{\left(\frac{1}{a_n b_n}\right)} = \frac{c_n}{d_n} \quad \text{con } c_n \rightarrow 0 \quad \text{y } d_n \rightarrow 0$$

3. De tipo potencial-exponencial:

i) Si  $a_n \rightarrow 1$  y  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $\left((a_n)^{b_n}\right)$  da lugar a la indeterminación  $1^\infty$ . (El número  $e$  es el límite de una sucesión de este tipo (véase 2.5); de hecho estas sucesiones suelen dar lugar a límites del tipo  $e^\alpha$ .)

OBSERVACIÓN: Si  $a_n = 1$  para todo  $n$  y  $b_n \rightarrow \infty$ , entonces  $(a_n)^{b_n} \rightarrow 1$ .

ii) Si  $a_n \rightarrow 0$  y  $b_n \rightarrow 0$ ,  $\left((a_n)^{b_n}\right)$  da lugar a la indeterminación  $0^0$ .

iii) Si  $a_n \rightarrow \infty$  y  $b_n \rightarrow 0$ ,  $\left((a_n)^{b_n}\right)$  da lugar a la indeterminación  $\infty^0$ .

OBSERVACIÓN: Teniendo en cuenta el teorema 4.2, tomando logaritmos, las indeterminaciones de tipo potencial-exponencial se reducen a tipo producto:

Si  $(a_n)^{b_n} \rightarrow l$ , entonces  $b_n \log a_n \rightarrow \log l$ .

## 5.2. Definición. Sucesiones equivalentes

Se dice que dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  son equivalentes si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , y lo representaremos por  $a_n \sim b_n$ .

## 5.3. Proposición

Sean  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  y  $(c_n)$  tres sucesiones de números reales. Si  $a_n \sim b_n$ , entonces

i) Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ , también existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ , y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$$

ii) Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n}$ , también existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n}$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n}$$

OBSERVACIÓN: *El resultado anterior permite sustituir una sucesión por otra equivalente en el cálculo de límites de un producto o de un cociente.*

*No se puede sustituir una sucesión por otra equivalente en sumas, exponenciales, logaritmos, etc. (véase problema resuelto 34).*

#### 5.4. Tabla de sucesiones equivalentes

1. Si  $a_n \rightarrow 0$

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} a_n \sim a_n \sim \operatorname{arcsen} a_n & \operatorname{tg} a_n \sim a_n \sim \operatorname{arctg} a_n & 1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2} \\ (1 + a_n)^\lambda - 1 \sim \lambda a_n & e^{a_n} - 1 \sim a_n & \log(1 + a_n) \sim a_n \end{array}$$

2. Si  $a_n \rightarrow 1$

$$\log a_n \sim a_n - 1$$

En particular  $\sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \log a$  para todo  $a > 0$ .

3. Se verifica la fórmula de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

#### 5.5. Definición. Órdenes de magnitud

Dadas dos sucesiones divergentes  $(a_n)$  y  $(b_n)$ , se dice que  $(b_n)$  es un infinito de orden superior al de  $(a_n)$ , y se representa  $a_n \ll b_n$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ .

Observemos que esta definición implica que  $|a_n| < |b_n|$  para  $n$  suficientemente grande. Se verifica la siguiente jerarquía de infinitos:

$$\log n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (p > 0, a > 1)$$

#### 5.6. Teorema. Criterio de Stolz

Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones. Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

siempre que

- i)  $(b_n)$  es una sucesión monótona divergente, o bien
- ii)  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  y  $(b_n)$  es monótona.

**5.7. Teorema**

- i) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = l$ .
- ii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  y  $a_n > 0$  para todo  $n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = l$ .

NOTA: *Los recíprocos no son ciertos. Por ejemplo la sucesión  $a_n = (-1)^n$  no tiene límite y sin embargo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$ .*

**5.8. Teorema**

Para toda sucesión  $(a_n)$  de números positivos se verifica

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Como consecuencia se tiene que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

**6. Sucesiones de números complejos****6.1. Definición. Sucesión de números complejos**

Se llama sucesión de números complejos a una aplicación  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , que denotaremos por  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o simplemente  $(z_n)$ , con  $z_n \in \mathbb{C}$  para todo  $n$ , siendo  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos.

**6.2. Definición. Límite de una sucesión de números complejos**

Una sucesión  $(z_n)$  de números complejos converge a  $l \in \mathbb{C}$ , y se representa  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$  ó  $z_n \rightarrow l$ , si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) / \forall n > N_0 \quad |z_n - l| < \varepsilon$$

donde  $|z_n - l|$  representa el módulo de  $z_n - l \in \mathbb{C}$ .

**6.3. Proposición**

Si  $z_n = x_n + y_n i$ ,  $l = a + b i$  son las expresiones en forma binómica de  $z_n, l \in \mathbb{C}$  respectivamente, se tiene que

$$z_n \rightarrow l \iff x_n \rightarrow a \text{ e } y_n \rightarrow b$$

NOTA: *El límite de una sucesión de números complejos se calcula hallando el límite de las sucesiones de sus partes real e imaginaria.*